L2 PC
Math 3, TD 4

Exercice 1

a) Trouver une base de l'espace vectoriel $M_{n,l}(\mathbb{K})$.
b) Montrer que l'ensemble, $Lin(V, W)$, des applications linéaires de V dans W est un espace vectoriel.
c) Montrer que si $dim(V) = n$ et $dim(W) = l$ alors $Lin(V, W)$ est isomorphe à $M_{ln}(\mathbb{K})$.

Exercice 2

On considère l'application $tr : M_{nn}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ définie par la trace d'une matrice carrée.
a) Montrer que tr est linéaire.
b) Quelle est la dimension du noyau de tr ?
c) Trouver une base du noyau de tr.

Exercice 3

Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie pour tout vecteur $u = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$ par : $f(u) = (-2u_1 + u_2 + u_3, u_1 - 2u_2 + u_3)$.

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Donner la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et de $\mathbb{R}^2$
3. Donner la matrice de f dans les bases de $((1, 1, 1), (1, 0, 1), (0, 1, 0))$ de $\mathbb{R}^3$ et $((1, -1), (2, 0))$ de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4

Calculer les déterminants des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

Exercice 5

Montrer que des vecteurs $v_1, \ldots, v_n$ de $\mathbb{K}^n$ forment une base si et seulement si la matrice dont les lignes sont ces vecteurs est inversible (si et seulement si le détermaniant de cette matrice est non nul).

Exercice 6

Soit la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ d'un $\mathbb{K}$-vectoriel V. On donne la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Si $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ représente la matrice d'une application linéaire de V dans V, calculer
a) $f(e_1 + e_2 - 2e_3)$
b) $(f \circ f)(e_1 - e_3)$
c) Montrer que $\mathcal{C} = (e_1 + e_2, e_1 - e_3, e_3)$ est aussi une base de V et calculer $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f)$ et $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f^2)$.